Corrigés des exercices 4.1 à 4.7 — حلول التمارين من 1.4 إلى 7.4

Exercice 4.1 :

1/ Pour calculer la vitesse il suffit de dériver l'équation horaire par rapport au temps :

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt} = 6t^2 - 18t + 12}$$

En dérivant la vitesse par rapport au temps on obtient l'accélération :

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt} = 12t - 18}$$

2/ L'étude du mouvement du mobile nécessite une étude mathématique de la fonction $s = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 1$. Le mouvement est accéléré ou retardé selon le signe du produit av. Quant au sens du mouvement il est indiqué par le signe de v.

Dressons le tableau de variation :

$v = 6t^2 - 18t + 12 = 0 \Rightarrow t = 1$; $t=2$; $a = 12t - 18 = 0 \Rightarrow t = 1{,}5$

t	0	1		1,5		2		∞
v	+	0	−		−	0	+	
a	−		−	0	+		+	
$a.v$	−		+		−		+	
Mouvmt	**Retardé sens +**		**Accéléré sens -**		**Retardé sens -**		**Accéléré sens +**	

Exercice 4.2 :

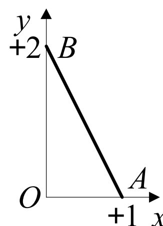
Commençons par la transformation trigonométrique : $\cos 2t = 2\cos^2 t - 1$,

Remplaçons dans l'expression de y qui devient : $y = 2\cos^2 t$,

Une autre transformation trigonométrique nous mène à : $y = 2\left(\sin^2 t - 1\right)$,

Il ne nous reste plus qu'à remplacer $\sin^2 t$ par x pour obtenir l'équation de la trajectoire qui est : $\boxed{y = 2\left(1 - x\right)}$.

Pour dessiner la trajectoire il faut remarquer que $0 \leq x \leq +1$, car quelque soit t, $0 \leq \sin^2 t = x \leq +1$. Nous en déduisons que la trajectoire est un segment de droite joignant les points $A\left(+1, 0\right)$ et $B\left(0, +2\right)$.



Exercice 4.3 :

Deux dérivations consécutives des équations horaires nous conduisent aux expressions des coordonnées des vecteurs vitesse et accélération du mobile à l'instant t :

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = \dot{x} = 3\left(t^2 - 1\right) \\ v_y = \dot{y} = -6t \\ v_z = \dot{z} = 3\left(t^2 + 1\right) \end{cases} \quad ; \quad \vec{a}=\begin{cases} a_x = \ddot{x} = 6t \\ a_y = \ddot{y} = -6 \\ a_z = \ddot{z} = 6t \end{cases}$$

2/ Le module du vecteur vitesse est égal à $v^2 = 18\left(1+t^2\right)^2 \Rightarrow \boxed{v = 3\sqrt{2}\left(1+t^2\right)}$

Calculons maintenant l'angle compris entre $\vec{v}$ et Oz . Pour cela calculons le module du produit scalaire :

$$\vec{v}.\vec{k} = v.k.\cos\left(\vec{v},\vec{k}\right) = v.cos\left(\vec{v},\vec{k}\right) \quad , \quad cos\left(\vec{v},\vec{k}\right) = \frac{\vec{v}.\vec{k}}{v}$$

$$\vec{v}\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{k}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{v}.\,\vec{k} = \left(\dot{x}.0\right) + \left(\dot{y}.0\right) + \left(\dot{z}.0\right) = 3\left(1+t^2\right)$$

$$cos\left(\vec{v},\vec{k}\right) = \frac{\vec{v}.\vec{k}}{v} = \frac{3\left(1+t^2\right)}{3\sqrt{2}\left(1+t^2\right)} \Rightarrow cos\left(\vec{v},\vec{k}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \boxed{\left(\vec{v},Oz\right) = \frac{\pi}{4}rad}$$

<u>Exercice 4.4</u> :

a/ Eliminons le temps entre les deux équations horaires pour obtenir l'équation de la trajectoire :

$$x = \ln t \Rightarrow t = e^x$$

$$y = e^x + \frac{1}{e^x} \Rightarrow \boxed{y = e^x + e^{-x}}$$

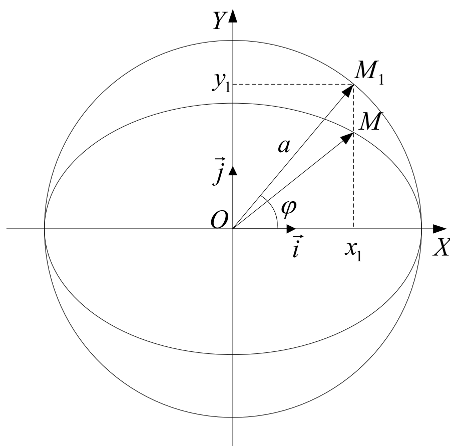
b/ calculons les modules de la vitesse et de l'accélération au temps t par dérivations successives des deux équations horaires par rapport au temps :

$$\left.\begin{array}{l} v_x = \dfrac{1}{t} \\ v_y = 1 - \dfrac{1}{t^2} \end{array}\right| \Rightarrow v = \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{t^2}\right)^2} \quad ; \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{1}{t^4} - \frac{1}{t^2} + 1}}$$

$$\left.\begin{array}{l} a_x = -\dfrac{1}{t^2} \\ a_y = \dfrac{2t}{t^4} = \dfrac{2}{t^3} \end{array}\right| \Rightarrow a = \sqrt{\left(\frac{1}{t^2}\right)^2 + \left(\frac{2}{t^3}\right)^2} \quad ; \quad \boxed{a = \sqrt{\frac{4}{t^6} + \frac{1}{t^4}}}$$

<u>Exercice 4.5</u> :

<u>Rappel mathématique concernant l'ellipse</u> : suivons le raisonnement qui accompagne la figure ci-dessous :



Equation du cercle $x^2 + y^2 - a^2 = 0 \rightarrow (1)$

Equation de l'ellipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \rightarrow (2)$

Coordonnées du point M: $\begin{cases} x_1 = a\cos\varphi \\ y_1 = a\sin\varphi \end{cases}$

remplaçons x et y dans l'équation (1):

$\forall M,\ a^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi - a^2 = 0 \Rightarrow \cos^2\varphi + \sin^2\varphi - 1 = 0 \rightarrow (3)$

Par identification des équations (2) *et* (3) *nous obtenons deux résultats importants qui caractérisent l'ellipse:*

$(2) = (3) : \cos\varphi = \dfrac{x}{a} \Rightarrow \boxed{x = a\cos\varphi}\ ,\quad \sin\varphi = \dfrac{y}{b} \Rightarrow \boxed{y = b\sin\varphi}$

Maintenant que nous avons les coordonnées du point M, nous pouvons repérer ce point sur l'ellipse par l'angle φ tel que $\cos\varphi = \dfrac{x}{a}$; $\sin\varphi = \dfrac{y}{b}$

La vitesse du point M est égale à :

$\overrightarrow{OM} = a\cos\varphi.\vec{i} + b\sin\varphi.\vec{j} \Rightarrow \boxed{\vec{v} = -a\dot{\varphi}\sin\varphi.\vec{i} + b\dot{\varphi}\cos\varphi.\vec{j}}$

L'accélération du point M est : $\boxed{\vec{\gamma} = -a\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right).\vec{i} + b\left(\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right).\vec{j}}$

<u>Exercice 4.6</u> :

1/ Pour obtenir l'équation de la trajectoire il suffit d'éliminer le temps entre les équations horaires :

$$\left.\begin{aligned} \cos\frac{t}{2} &= \frac{x}{\sqrt{2}} \\ \sin\frac{t}{2} &= \frac{y}{2\sqrt{2}} \end{aligned}\right| \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{8} = 1}$$

La trajectoire est donc une **ellipse**.

2/ En dérivant les équations horaires par rapport au temps, on obtient les deux composantes du vecteur vitesse :

$$\vec{v}_x = \dot{x} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{t}{2}$$

$$\vec{v}_y = \dot{y} = \sqrt{2}\cos\frac{t}{2}$$

En dérivant les deux composantes du vecteur vitesse par rapport au temps, on obtient les deux composantes du vecteur accélération :

$$\vec{a}_x = \dot{v}_x = -\frac{\sqrt{2}}{4}\cos\frac{t}{2}$$

$$\vec{a}_y = \dot{v}_y = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{t}{2}$$

Ecrivons à présent l'expression vectorielle de l'accélération pour trouver sa relation avec le vecteur position :

$$\vec{a} = -\frac{1}{4}x.\vec{i} - -\frac{1}{4}y.\vec{j} \Rightarrow \vec{a} = -\frac{1}{4}\left(x.\vec{i} - y.\vec{j}\right)\ ;\quad \boxed{\vec{a} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{OM}}$$

Puisque la trajectoire est une ellipse, le mouvement va se répéter à l'infini pour une variation du temps de 0 à ∞.

Soit T l'intervalle de temps séparant deux passages consécutifs du mobile par la même position et dans le même sens.

L'abscisse du mobile au temps t est : $x = \sqrt{2}\cos\frac{t}{2}$

L'abscisse du mobile au temps $t+T$ est : $x' = \sqrt{2}\cos\frac{(t+T)}{2}$

Puisque le mouvement est périodique il faut que $x = x'$:

$$cos\alpha = cos(\alpha+2\pi) \;;\quad \cos\frac{t}{2} = \cos\frac{(t+T)}{2} \Rightarrow \frac{T}{2} = 2\pi \Rightarrow \boxed{T = 4\pi}$$

3/ Position du mobile et ses coordonnées pour une accélération de module $\frac{\sqrt{5}}{4}$:

$$a = \frac{\sqrt{5}}{4},$$

$$a^2 = \frac{2}{16}\cos^2\frac{t}{2} + \frac{2}{4}\sin^2\frac{t}{2} = \frac{5}{16} \Rightarrow 2\cos^2\frac{t}{2} + 8\sin^2\frac{t}{2} = 5$$

$$2\left(1-\sin^2\frac{t}{2}\right) + 8\sin^2\frac{t}{2} = 5 \Rightarrow 6\sin^2\frac{t}{2} = 3 \Rightarrow \sin^2\frac{t}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\frac{t}{2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \;,\; t \succ 0 \;;\; \frac{t}{2} = \left| \begin{array}{l} +\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ +\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{array} \right.$$

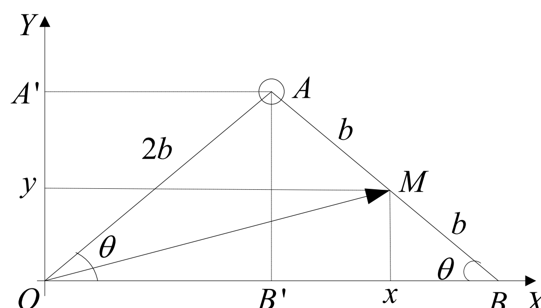
En prenant en considération la condition $0 \le t \le 4\pi$, nous résumons les résultats dans le tableau suivant :

k	t	x	y	v_x	v_y
0	$\frac{\pi}{2}$	$+1$	$+2$	$-\frac{1}{2}$	$+1$
1	$\frac{3\pi}{2}$	-1	$+2$	$-\frac{1}{2}$	-1

Exercice 4.7 :

1/ A l'aide de la figure ci-dessous on écrit l'expression du vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$$



Il reste à déterminer les deux équations horaires, c'est-à-dire les coordonnées en fonction du temps :

$$x = \overline{OA} + b\cos\varphi \ , \ x = 2b\cos\varphi + b\cos\varphi \Rightarrow \ x = 3b\cos\varphi$$

$$y = \overline{AA'} - b\sin\varphi \ , \ y = 2b\sin\varphi - b\sin\varphi \ \Rightarrow y = b\sin\varphi$$

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{i}.3b\cos\varphi + \vec{j}.b\sin\varphi}$$

On en déduit l'équation de la trajectoire par élimination du temps entre les équations horaires :

$$\left. \begin{array}{l} x^2 = 9b^2\cos^2\varphi \\ y^2 = b^2\sin^2\varphi \end{array} \right| \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{9b} = \frac{y^2}{b^2} = 1}$$ C'est l'équation d'une ellipse.

2/ La deuxième dérivée du vecteur position par rapport au temps nous conduit à l'expression du vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \omega^2\left(\vec{i}.3b.\cos\omega t + \vec{j}.b.\sin\omega t\right) \ \Leftrightarrow \ \vec{a} = -\omega^2.\overrightarrow{OM}$$

D'où le module de cette accélération :

$$a = 9b^2.\cos^2\omega t + b^2.\sin^2\omega t \Rightarrow \boxed{a = b\sqrt{9\cos^2\omega t + \sin^2\omega t}}$$